Тема: Линейное программирование. Транспортная задача. Метод потенциалов.

Задание: составить оптимальный план распределения поставок. Начальный базисный план перевозок можно сделать любым известным способом. Стоимость перевозки единицы груза, а также потребности и наличие груза даны в таблице.

Поставщики/ Потребители	**20**	**110**	**40**	**110**
60	1	2	5	3
120	1	6	5	2
100	6	3	7	4

Решение

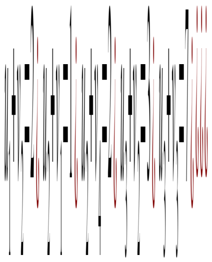
Методом минимального элемента составляем начальный план перевозок. Согласно этому методу, грузы распределяются в первую очередь в те клетки, в которых находится минимальный тариф перевозок c_{ij}. Далее поставки распределяются в незанятые клетки с наименьшими тарифами с учетом оставшихся запасов у поставщиков и удовлетворения спроса потребителей. Процесс продолжается до тех пор, пока все грузы от поставщиков не будут вывезены, а потребители не будут удовлетворены. При распределении грузов может оказаться, что количество занятых клеток меньше, чем m+n-1. В этом случае недостающее их число заполняется клетками с нулевыми поставками, такие клетки называют условно занятыми.

Нулевые поставки помещают в незанятые клетки с учетом наименьшего тарифа таким образом, чтобы в каждых строке и столбце было не менее чем по одной занятой клетки.

Так как $\Delta_{21}=1$ (минимальный элемент), то в него помещаем 20, оставшиеся ячейки в первом столбце будут пустыми так как весь груз на данном объекте распределен. В ячейку Δ_{12} помещаем 60, а в ячейку Δ_{32} помещаем 50, так как оценка стоимости в данной клетке меньше чем в ячейке Δ_{22}. В ячейку Δ_{24} помещаем 100, так как в этой ячейке находится минимальная стоимость из всех оставшихся. На данном объекте осталось 10 единиц груза, его помещаем в ячейку Δ_{34} , так как это последний оставшийся потребитель, который готов приобрести последний оставшийся груз. 40 помещаем в ячейку Δ_{33}, так как 40 единиц груза может приобрести 3-ий потребитель.

Поставщики/ Потребители	**20**	**110**	**40**	**110**
60	1	2 60	5	3
120	1 20	6	5	2 100
100	6	3 50	7 40	4 10

Для каждой заполненной клетки записываем уравнение потенциалов:



, где u_i – номер строки, а v_j- номер столбца

Решая систему уравнений получаем:

$u_1=0-\textit{берем произвольно}$

$u_2=-1$

$u_3=1$

$v_1=2$

$v_2=2$

$v_3=6$

$v_4=3$

Составим разности потенциалов для свободных клеток:

$$\Delta_{11}=(u_1+v_1)-c_{11}=0+2-1=1$$

$$\Delta_{13}=(u_1+v_3)-c_{13}=0+6-5=1$$

$$\Delta_{14}=(u_1+v_4)-c_{14}=0+3-3=0$$

$$\Delta_{22}=(u_2+v_2)-c_{22}=-1+2-6=-5$$

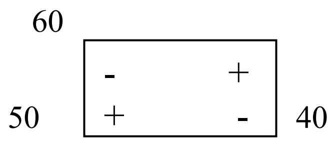
$$\Delta_{23}=(u_2+v_3)-c_{23}=-1+6-5=0$$

$$\Delta_{31} = (u_3 + v_1) - c_{31} = -1 + 2 - 6 = -5$$

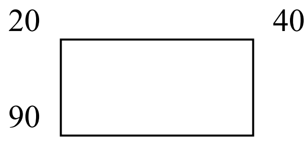
Так как Δ_{11}, $\Delta_{13} > 0$, то опорное решение не является оптимальным и его можно улучшить, перейдя от одного опорного решения к другому.

Для свободной клетки с $\Delta_{ij} > 0$ строится цикл, все вершины которого кроме одной находятся в занятых клетках; углы прямые, число вершин четное. Около свободной клетки цикла ставится знак (+), затем поочередно проставляют знаки (-) и (+). У вершин со знаком (-) выбирают минимальный груз, его прибавляют к грузам, стоящим у вершин со знаком (+), и отнимают от грузов у вершин со знаком (-). В результате перераспределения груза получим новое опорное решение. Это решение проверяем на оптимальность и т.д. до тех пор, пока не получим оптимальное решение.

Для свободной клетки (1;3), имеющей положительную оценку ($\Delta_{13} > 0$) строится цикл.



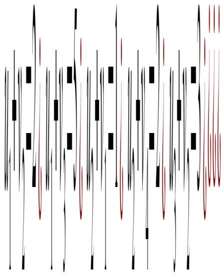
У вершин со знаком (-) выбираем минимальный груз, он равен 40. Его прибавляем к грузам, стоящих у положительных вершин, и отнимаем от грузов, стоящих у отрицательных вершин. Получаем новый цикл:



После перераспределения груза в пределах цикла имеем следующую транспортную таблицу. Транспортная таблица не является окончательной, поэтому выполняем дальнейшие расчёты.

Поставщики/ Потребители	**20**	**110**	**40**	**110**
60	1	2 20	5 40	3
120	1 20	6	5	2 100
100	6	3 90	7	4 10

Для каждой заполненной клетки записываем уравнение потенциалов:



, где u_i – номер строки, а v_j- номер столбца

Решая систему уравнений получаем:

$u_1 = 0 - \text{берем произвольно}$

$u_2 = -1$

$u_3 = 1$

$v_1 = 2$

$v_2 = 2$

$v_3 = 5$

$v_4 = 3$

Составляем разности потенциалов для свободных клеток:

$$\Delta_{11} = (u_1 + v_1) - c_{11} = 0 + 2 - 1 = 1$$

$$\Delta_{23} = (u_2 + v_3) - c_{23} = -1 + 5 - 5 = -1$$

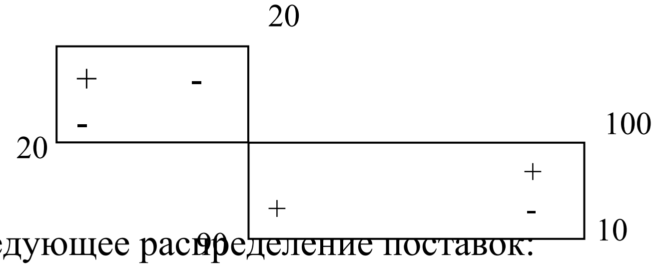
$$\Delta_{31} = (u_3 + v_1) - c_{31} = 1 + 2 - 6 = -3$$

$$\Delta_{14} = (u_1 + v_4) - c_{14} = 0 + 3 - 3 = 0$$

$$\Delta_{33} = (u_3 + v_3) - c_{33} = 1 + 5 - 7 = -1$$

$$\Delta_{22} = (u_2 + v_2) - c_{22} = -1 + 2 - 6 = -5$$

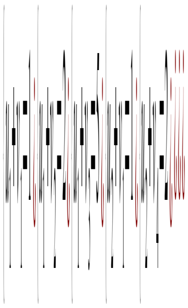
Так как $\Delta_{11} > 0$, то опорное решение не является оптимальным и его можно улучшить, перейдя от одного опорного решения к другому. Строим цикл для ячейки Δ_{11} .



Имеем следующее распределение поставок:

Поставщики/ Потребители	**20**	**110**	**40**	**110**
60	1 10	2 10	5 40	3
120	1 10	6	5	2 110
100	6	3 100	7	4

Для каждой заполненной клетки записываем уравнение потенциалов:



, где u_i – номер строки, а v_j- номер столбца

Решая систему уравнений получаем:

$u_1=0-\textit{берем произвольно}$

$u_2=0$

$u_3=1$

$v_1=1$

$v_2=2$

$v_3=5$

$v_4=2$

Составляем разности потенциалов для свободных клеток:

$\Delta_{14}=(u_1+v_4)-c_{14}=0+2-3=-1$

$\Delta_{22}=(u_2+v_2)-c_{22}=0+2-6=-4$

$\Delta_{23}=(u_2+v_3)-c_{23}=0+5-5=0$

$\Delta_{31}=(u_3+v_1)-c_{31}=1+1-6=-4$

$\Delta_{33}=(u_3+v_3)-c_{33}=1+5-7=-1$

$\Delta_{34}=(u_3+v_4)-c_{34}=1+2-4=-1$

Получили, что все оценки свободных клеток не положительные, следовательно, найденное решение оптимальное. Найденный план оптимальный, но не единственный, так как присутствует нулевая оценка.

$$X_{опт.}=\begin{pmatrix} 10 & 10 & 40 & 0 \\ 10 & 0 & 0 & 110 \\ 0 & 100 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Стоимость перевозок равна:

F=1*10+2*10+5*40+1*10+2*110+3*100=10+20+200+10+220+300=760

Ответ: $$X_{опт.}=\begin{pmatrix} 10 & 10 & 40 & 0 \\ 10 & 0 & 0 & 110 \\ 0 & 100 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Стоимость перевозок равна: F=760.